CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR 1975

Option Mathématiques — Epreuve à option

Première partie : PREMIER PROBLEME

On se propose de calculer, sans utiliser de primitives, les intégrales définies

$$I_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}\, d\theta$$

x étant un réel différent de ± 1

n un élément quelconque de N

I. — (Question préliminaire)

Décomposer la fraction rationnelle $\varphi(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$ en éléments simples sur le corps des complexes $(0 < \theta < \pi)$.

En déduire le développement en série entière de la fonction $\varphi(x)$

par rapport à la variable x

par rapport à la variable $\dfrac{1}{x}$

Indiquer pour quelles valeurs de x ces développements sont valables.

Qu'obtient-on pour $\theta = 0$ $\theta = \pi$?

II. — (Question préliminaire)

Effectuer la division, suivant les puissances croissantes, du polynôme $(1 - X^2)$ par le polynôme $(1 - 2X\cos\theta + X^2)$.

Vérifier que le reste d'ordre $(n - 1)$ est $2X^n \cos n\theta - 2X^{n+1}\cos(n-1)\theta$.

III. — Calculer

$$I_0 = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} \quad (x \neq \pm 1)$$

On distinguera $|x| < 1$ et $|x| > 1$.

IV. — Du résultat de la divisison effectuée dans la question (II) trouver une relation entre

$I_0(x)$, $I_n(x)$, $I_{n-1}(x)$

En déduire l'expression de $I_n(x)$.

V. — Retrouver $I_n(x)$ en utilisant l'un ou l'autre des développements en série de la question (I)

Deuxième partie :

On se propose maintenant de calculer l'intégrale

$$J(x) = \int_0^{\pi} \text{Log}\,(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\, d\theta$$

I. — Question préliminaire

En décomposant le polynôme $(X^{2n} - 1)$ en facteurs premiers sur le corps des complexes montrer que

$$(X^{2n} - 1) = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{k=n-1} \left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

II. — n étant un entier positif quelconque, on considère la fonction φ_n définie sur l'ensemble des réels par

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} \text{Log}\left(x^2 - 2\cos\frac{k\pi}{n}x + 1\right)$$

En utilisant l'égalité de la première question, donner une expression simple de $\varphi_n(x)$ pour $x \neq (\pm 1)$.

III. — Vérifier que la fonction φ_n est continue sur l'ensemble des réels.

En déduire $\varphi_n(-1)$ et $\varphi_n(1)$.

IV. — On suppose maintenant x fixé, $\varphi_n(x)$ devenant une suite réelle.

Trouver la limite de $\varphi_n(x)$ pour $n \longrightarrow +\infty$ (on trouvera des expressions différentes suivant les valeurs de x.

V. — Déduire de ces résultats les calculs des intégrales

$$F(x) = \int_0^{\pi} \text{Log}\,(x^2 - 2x\cos\theta + 1)\,d\theta$$

DEUXIEME PROBLEME

On rappelle que si E est un espace vectoriel sur le corps des réels, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique dont la forme quadratique associée est définie positive. On le désignera par la notation $< \quad >$.

Un espace muni d'un produit scalaire est un espace euclidien.

I. — Dans un espace euclidien, soient n vecteurs $\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \ldots \quad \vec{u}_n$.

On leur associe la matrice carrée d'ordre n

$$A = \| a_{ij} \| \qquad a_{ij} = < \vec{u}_i , \vec{u}_j >$$

donc la matrice

$$A = \begin{bmatrix} < \vec{u}_1 , \vec{u}_1 > & < \vec{u}_1 , \vec{u}_2 > & \ldots\ldots & < \vec{u}_1 , \vec{u}_n > \\ < \vec{u}_2 , \vec{u}_1 > & < \vec{u}_2 , \vec{u}_2 > & \ldots\ldots & < \vec{u}_2 , \vec{u}_n > \\ & & & \\ < \vec{u}_n , \vec{u}_1 > & < \vec{u}_n , \vec{u}_2 > & \ldots\ldots & < \vec{u}_n , \vec{u}_n > \end{bmatrix}$$

Montrer que si la matrice A est régulière, les vecteurs $\{ \vec{u}_1 , \ldots\ldots \vec{u}_n \}$ forment un système libre (On pourra montrer cette proposition par sa contraposée : si les vecteurs forment un système lié, la matrice A n'est pas régulière).

II. — Soit E_α l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment réel $[0, \alpha]$ (donc $\alpha > 0$). On définit la fonction φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$

$$\varphi\ (f, g) = \int_0^{\alpha} f(x)\, g(x)\, dx$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

III. — Soit $E_{2\pi}$ l'espace précédent correspondant à $\alpha = 2\pi$.

On considère les fonctions $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$

$$f_1\ (x) = \cos x \qquad f_2\ (x) = \cos 2x \qquad f_n\ (x) = \cos nx$$

Montrer, en appliquant le résultat de (I) que ces fonctions forment un système libre

Trouver une base orthonormée du sous-espace engendré par $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$.

IV. — Soit ψ la fonction, définie sur $x \in [0, 1]$ définie par :

$$\text{si } x = \frac{1}{2} \qquad \psi\ (x) = 1$$

pour les autres valeurs de x : $\psi\ (x) = 0$

Montrer (en utilisant les sommes de Riemann) que la fonction est intégrable, et calculer

$$\int_0^1 \psi(x)\, dx$$

V. — E_1 est maintenant l'espace vectoriel des fonctions définies et intégrables sur $[0, \alpha]$, on définit encore la fonction φ_1 de $E_1 \times E_1$ dans $\mathbb{R}$

$$\varphi_1\ (f, g) = \int_0^{\alpha} f\,(x).\, g(x)\, dx$$

φ_1 définit-elle encore un produit scalaire ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail